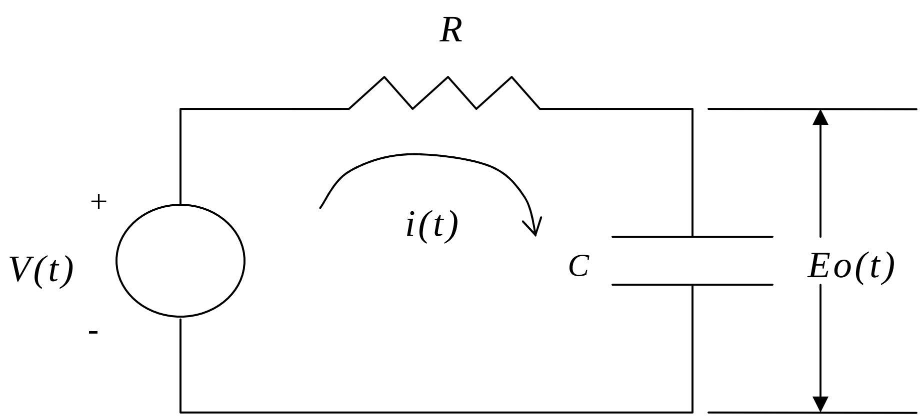
SISTEMAS ELECTRICOS

EJEMPLO 1.- CIRCUITO ELECTRICO DE COMPONENTES EN SERIE CON UNA FUENTE DE TENSIÓN

Circuito eléctrico con un componente pasivo *R* y un componente almacenador de energía *C*, ambos en serie con una fuente de voltaje *V(t)*.



Objetivo: Determinar la respuesta dinámica de la tensión en el condensador *Eo(t)* ante una variación de *V(t)*.

Suposiciones:
1.- Elementos ideales y lineales

Constantes:
R = Resistencia
C = Capacitancia

Variables:
V(t) = fuente de voltaje (variable de entrada)
i(t) = corriente del circuito
$V_R(t)$ = caída de voltaje en la resistencia
Vc(t) = *Eo(t)*= caída de voltaje en el condensador

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Leyes de Kirchhoff***

$$V(t) - V_R(t) - Vc(t) = 0 \tag{1}$$

$$V(t) = V_R(t) + Vc(t) \tag{2}$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$V_R(t) = R\, i(t) \tag{3}$$

$$Vc(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = Eo(t) \tag{4}$$

Se sustituyen las ecuaciones (3) y (4) en (2)

$$V(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{5}$$

Expresar la corriente en función de *Eo*

$$i(t) = C\,\frac{dEo(t)}{dt} \tag{6}$$

El modelo completo del sistema es entonces:

$$V(t) = R\, i(t) + Eo(t) \tag{7}$$

$$i(t) = C\,\frac{dEo(t)}{dt} \tag{8}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Sustituyendo (8) en (7)

$$V(t) = RC\frac{dEo(t)}{dt} + Eo(t) \tag{9}$$

Se escribe la ecuación en estado estacionario

$$\overline{V} = RC\frac{d\overline{Eo}}{dt} + \overline{Eo} \tag{10}$$

Restando (9) – (10)

$$V(t) - \overline{V} = RC\frac{d(Eo(t) - \overline{Eo})}{dt} + (Eo(t) - \overline{Eo}) \tag{11}$$

Se escribe en variables de perturbación

$$V^*(t) = RC\frac{dEo^*(t)}{dt} + Eo^*(t) \tag{12}$$

Aplicando Transformada de Laplace

$$V^*(s) = RC\,s\,Eo^*(s) + Eo^*(s) \tag{13}$$

$$V^*(s) = (RC\,s + 1)Eo^*(s) \tag{14}$$

Despejando se obtiene la Función de Transferencia:

$$\frac{Eo^*(s)}{V^*(s)} = \frac{1}{RC\,s + 1} \tag{15}$$

Forma general

$$\frac{Eo^{*}(s)}{V^{*}(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \qquad \text{Sistema de 1er Orden} \qquad (16)$$

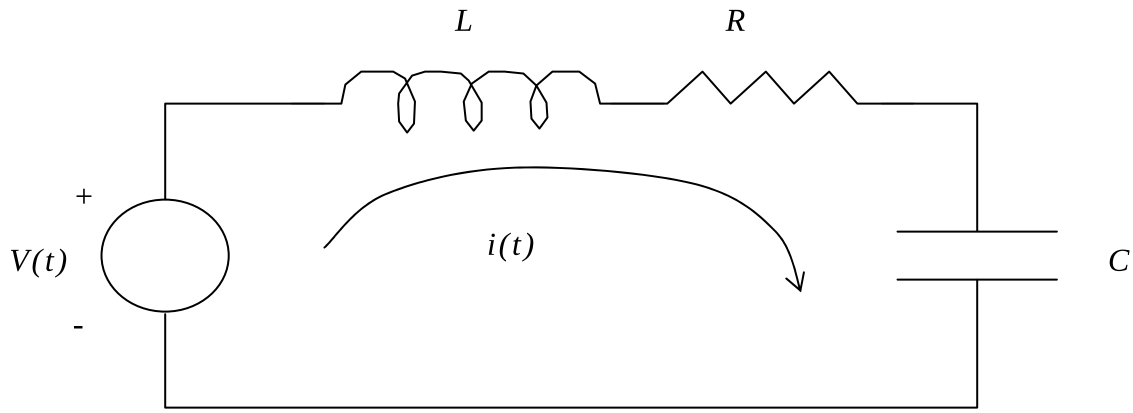
donde: k = ganancia estática del sistema = 1
τ = constante de tiempo del sistema = RC

DIAGRAMA DE BLOQUES

$$V^{*}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{\tau s + 1}} \longrightarrow Eo^{*}(s)$$

EJEMPLO 2.- CIRCUITO ELECTRICO DE COMPONENTES EN SERIE CON UNA FUENTE DE TENSIÓN

Circuito eléctrico con un componente pasivos *R* y dos componentes almacenadores de energía *C* y *L*, todos en serie con una fuente de voltaje *V(t)*.



Objetivo: Determinar la respuesta dinámica de la corriente *i(t)* ante una variación de *V(t)*.

Suposiciones:
1.- Elementos ideales y lineales

Constantes:
R = Resistencia
L = Inductancia
C = Capacitor

Variables:
V*(t)* = fuente de tensión
i(t) = corriente del circuito
$V_R(t)$ = caída de voltaje en la resistencia
$Vc(t)$ = caída de voltaje en el condensador
$V_L(t)$ = caída de voltaje en el inductor

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Ley de Kirchhoff***

$$V(t)=V_L(t)+V_R(t)+V_C(t) \tag{17}$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$V_L(t)=L\frac{di(t)}{dt} \tag{18}$$

$$V_R(t)=R\,i(t) \tag{19}$$

$$V_C(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{20}$$

Sustituyendo (18), (19) y (20) en (17)

$$V(t)=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{21}$$

y derivando se obtiene el modelo del sistema como:

$$L\frac{di^2(t)}{dt}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{dV(t)}{dt} \tag{22}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Se escribe la ecuaciòn (22) en variables de perturbación y se toma la transformada de Laplace:

$$L\,s^2 I^*(s) + R\,s\,I^*(s) + \frac{1}{C} I^*(s) = s\,V^*(s) \tag{23}$$

$$I^*(s)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}\right) = \frac{1}{L}s\,V^*(s) \tag{24}$$

$$\frac{I^*(s)}{V^*(s)} = \frac{\frac{1}{L}s}{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}\right)} \tag{25}$$

si hacemos

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L}; \qquad \omega_n^{\,2} = \frac{1}{CL}$$

$$\frac{I^*(s)}{V^*(s)} = \frac{k\omega_n^{\,2} s}{\left(s^2 + 2\xi\omega_n\, s + \omega_n^{\,2}\right)} \tag{26}$$

donde $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{CL}}$ $\quad \xi = \sqrt{\dfrac{CR^2}{4L}}$ $\quad k = C$

DIAGRAMA DE BLOQUES

$$V(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}}} \longrightarrow I(s)$$

$$V(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{k\,\omega_n\,s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2}} \longrightarrow I(s)$$

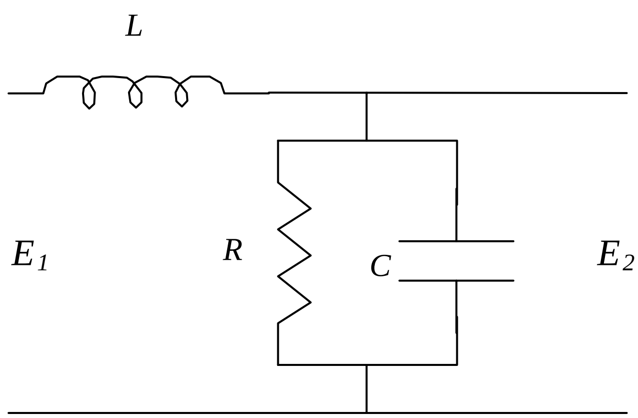
ξ = coeficiente de amortiguación $\sqrt{\dfrac{CR^2}{4L}}$

ω_n = frecuencia natural $= \sqrt{\dfrac{1}{CL}}$

k = ganancia $= C$

EJEMPLO 3.- CIRCUITO ELÉCTRICO DE COMPONENTES RESISTIVO, CAPACITIVO E INDUCTIVO

Circuito eléctrico compuesto por un componente resistivo R, y dos componentes almacenadores de energía C y L.



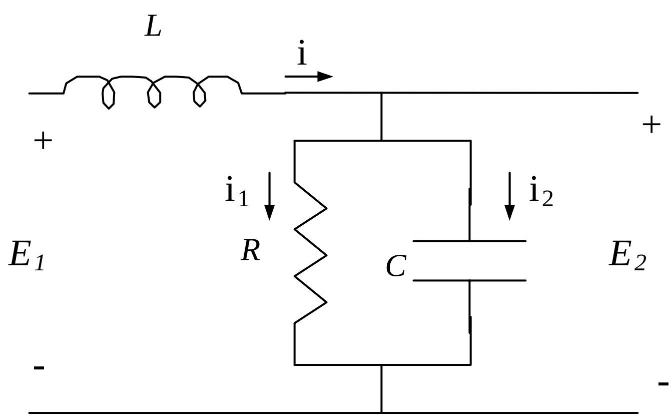
Objetivo: Determinar la respuesta dinámica de la tensión $E_2(t)$ ante una variación de $E_1(t)$.

Suposiciones:
1.- Elementos ideales y lineales

Constantes:
R = Resistencia
C = Condensador
L = Inductor

Variables:
$E_1(t)$ = tensión de entrada
$E_2(t)$ = tensión de salida
$i(t)$ = corriente a través del inductor
$i_1(t)$ = corriente a través de la resistencia
$i_2(t)$ = corriente a través del condensador
$V_L(t)$ = caída de voltaje en el inductor

MODELO MATEMÁTICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES



- ***Leyes de Kirchhoff***

$$E_1(t) = V_L(t) + E_2(t) \quad (27)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (28)$$

$$E_2(t) = V_R(t) = V_C(t) \quad (29)$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$V_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \quad (30a)$$

$$V_R(t) = R\;i_1(t) \quad (30b)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt \quad (30c)$$

Por lo tanto el modelo completo del sistema es:

$$E_1(t) = L\frac{di(t)}{dt} + E_2(t) \tag{31}$$

$$E_2(t) = R\ i_1(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt \tag{32}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{33}$$

MODELO MATEMÁTICO EN FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Sustituyendo (33) en (31):

$$E_1(t) = L\frac{d(i_1(t) + i_2(t))}{dt} + E_2(t) \tag{34}$$

Despejando $i_1(t)$ y $i_2(t)$ de la ecuación (32):

$$i_1(t) = \frac{E_2}{R} \qquad i_2(t) = C\frac{dE_2}{dt} \qquad \text{(35) y (36)}$$

Finalmente, sustituyendo (35) y (36) en (37) y arreglando, obtenemos el modelo matemático en ecuaciones diferenciales del sistema:

$$LC\frac{d^2E_2(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dE_2(t)}{dt} + E_2(t) = E_1(t) \tag{37}$$

En estado estacionario: $\overline{E_1} = \overline{E_2}$, y tomando variables de perturbación, la ecuación (37) queda:

$$LC\frac{d^2E_2^*(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dE_2^*(t)}{dt} + E_2^*(t) = E_1^*(t) \tag{38}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$LCs^2E_2^*(s)+\frac{L}{R}sE_2^*(s)+E_2^*(s)=E_1^*(s) \qquad (39)$$

La Función de Transferencia queda:

$$\frac{E_2^*(s)}{E_1^*(s)}=\frac{1}{LC\,s^2+\frac{L}{R}s+1} \qquad \text{Sistema de 2do Orden} \qquad (40)$$

DIAGRAMA DE BLOQUES

$$E_1^*(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{LC\,s^2+\frac{L}{R}s+1}} \longrightarrow E_2^*(s)$$

Escribiendo la función de transferencia en forma general:

$$\frac{E_2^*(s)}{E_1^*(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (41)$$

donde:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\zeta=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$